Language: **Italian**

*Sabato, 28 Aprile 2012*

**Problema 1.** Siano $A$, $B$ e $C$ punti che stanno su una circonferenza $\Gamma$ con centro $O$. Supponiamo che $\angle ABC > 90°$. Sia $D$ il punto di intersezione della retta $AB$ con la retta perpendicolare ad $AC$ in $C$. Sia $\ell$ la retta passante per $D$ e perpendicolare ad $AO$. Sia $E$ il punto di intersezione di $\ell$ con la retta $AC$, e sia $F$ il punto di intersezione di $\Gamma$ con $\ell$ che si trova tra $D$ ed $E$.

Dimostrare che le circonferenze circoscritte ai triangoli $BFE$ e $CFD$ sono tra loro tangenti in $F$.

**Problema 2.** Dimostrare che

$$\sum_{\text{cyc}}(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} \geq 4(xy+yz+zx),$$

per tutti i numeri reali positivi $x$, $y$ e $z$.

*La notazione sopra significa che il left-hand side è*

$$(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)}+(y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)}+(z+x)\sqrt{(y+z)(y+x)}.$$

**Problema 3.** Sia $n$ un intero positivo. Sia $P_n = \{2^n, 2^{n-1}\cdot 3, 2^{n-2}\cdot 3^2, \dots, 3^n\}$. Per ogni sottoinsieme $X$ di $P_n$, indichiamo con $S_X$ la somma di tutti gli elementi di $X$, con la convenzione che $S_\emptyset = 0$ dove $\emptyset$ indica l'insieme vuoto. Supponiamo che $y$ sia un numero reale tale che $0 \leq y \leq 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

Dimostrare che esiste un sottoinsieme $Y$ di $P_n$ tale che $0 \leq y - S_Y < 2^n$.

**Problema 4.** Sia $\mathbb{Z}^+$ l'insieme degli interi positivi. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tali che le seguenti condizioni sono entrambe soddisfatte:

(i) $f(n!) = f(n)!$ per ogni intero positivo $n$,

(ii) $m - n$ divide $f(m) - f(n)$ tutte le volte che $m$ ed $n$ sono interi positivi distinti.

*Ogni problema vale 10 punti.*

*Tempo concesso: 4 ore e 30 minuti.*