Language: French

Samedi 28 Avril 2012

Problème 1. Soit A, B et C des points d'un cercle Γ de centre O. On suppose : $A\widehat{B}C > 90°$. Soit D le point d'intersection de la droite (AB) et de la droite perpendiculaire à la droite (AC) en C. Soit ℓ la droite passant par D et perpendiculaire à la droite (AO). Soit E le point d'intersection de ℓ avec la droite (AC) et F le point d'intersection de Γ avec ℓ qui est situé entre D et E.

Montrer que les cercles circonscrits aux triangles BFE and CFD sont tangents en F.

Problème 2. Montrer que :

$$\sum_{\text{cyc}}(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} \geq 4(xy+yz+zx),$$

pour tous réels strictement positifs x, y et z.

La notation ci-dessus signifie que le membre de gauche de l'inégalité est :

$$(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} + (y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)} + (z+x)\sqrt{(y+z)(y+x)}.$$

Problème 3. Soit n un entier strictement positif et P_n l'ensemble :

$$P_n = \{2^n, 2^{n-1}\cdot 3, 2^{n-2}\cdot 3^2, \ldots, 3^n\}.$$

Pour tout sous ensemble X de P_n , on désigne par S_X la somme des éléments de X, avec la convention que, si X est l'ensemble vide, alors S_X=0. Soit y un réel vérifiant :

$$0 \leq y \leq 3^{n+1} - 2^{n+1}.$$

Montrer qu'il existe un sous ensemble Y de P_n tel que $0 \leq y - S_Y < 2^n$.

Problème 4. On désigne par $\mathbb{Z}_+^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs. Trouver toutes les fonctions f, $f : \mathbb{Z}_+^* \to \mathbb{Z}_+^*$, vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) pour tout entier n strictement positif $f(n!) = f(n)!$

(ii) pour tous entiers m et n, strictement positifs et différents, $m-n$ divise $f(m)-f(n)$

Chaque problème vaut 10 points.
Temps accordé : 4 heures et 30 minutes.