Language: **Azerbaijani**

Şənbə, 28 aprel 2012

Məsələ 1. *A*, *B* və *C* nöqtələri mərkəzi *O* olan *Γ* çevrəsi üzərində yerləşirlər. Tutaq ki, $\angle ABC > 90^0$. *AC*- yə *C* nöqtəsində perpendikulyar olan düz xətt ilə *AB* düz xəttinin kəsişməsi *D* nöqtəsi olsun. *D* nöqtəsindən keçən və *AO*-ya perpendikulyar olan düz xətti ℓ ilə işarə edək. *AC* düz xətti ilə ℓ düz xəttinin kəsişməsi *E* nöqtəsi olsun. *Γ* çevrəsi ilə ℓ düz xətti *D* və *E* nöqtələri arasında olan *F* nöqtəsində kəsişirlər.

Isbat edin ki, *BFE* və *CFD* üçbucaqlarının xaricinə çəkilmiş çevrələr biri-birinə *F* nöqtəsində toxunurlar.

Məsələ 2. Bütün müsbət həqiqi *x,y,z* ədədləri üçün

$$\sum_{cyc}(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} \geq 4(xy+yz+zx)$$

bərabərsizliyini isbat edin.

Yuxarıdakı işarədə sol tərəfdəki ifadə aşağıdakı cəmi göstərir.

$$(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} + (y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)} + (z+x)\sqrt{(y+z)(y+x)}.$$

Məsələ 3. n – müsbət tam ədəd olmaqla $P_n = \{2^n, 2^{n-1}\cdot 3, 2^{n-2}\cdot 3^2, \cdots, 3^n\}$ olsun. P_n-in hər hansı bir X alt çoxluğunun elementlərinin cəmini S_X ilə işarə edək. Burada ∅ boş çoxluğu üçün $S_\emptyset = 0$. y- həqiqi ədədi $0 \leq y \leq 3^{n+1} - 2^{n+1}$ şərtini ödəyir.

İsbat edin ki, P_n- in elə Y alt çoxluğu var ki, $0 \leq y - S_Y < 2^n$ olsun.

Məsələ 4. $\mathbb{Z}^+$ müsbət tam ədədlər çoxluğu olsun. Aşağıdakı hər iki şərti ödəyən bütün $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ funksiyalarını tapın

(i) istənilən müsbət tam n ədədi üçün $f(n!) = f(n)!$

(ii) biri-birindən fərqli bütün müsbət tam m və n ədədləri üçün *f(m)-f(n)* fərqi *m-n* fərqinə bölünsün.

Hər sual 10 bal dəyərindədir.
İmtahana ayrılan vaxt 4 saat 30 dəqiqə.