Language: **Arabic**

السبت ٢٨ أبريل ٢٠١٢

المسألة 1 . لتكن A ، B و C نقطا على الدائرة Γ التي مركزها O . لنفرض أنّ الزاوية $\angle ABC > 90^\circ$. النقطة D هي نقطة تقاطع المستقيم AB مع المستقيم العمودي على AC في النقطة C . ليكن ℓ المستقيم المار في النقطة D والعمودي على AO ، و E نقطة تقاطع ℓ مع المستقيم AC ، و F نقطة تقاطع الدائرة Γ مع المستقيم ℓ والتي تقع بين D و E .

برهن أنّ الدائرتين المحيطيّتين للمثلّثين BFE و CFD تتماسّان في النقطة F .

المسألة 2 . برهن أنّ

$$\sum_{cyc}(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} \geq 4(xy+yz+zx),$$

لجميع الأعداد الحقيقيّة الموجبة x ، y ، و z .

الترميز أعلاه يعني أنّ الجهة اليسرى تساوي

$$(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} + (y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)} + (z+x)\sqrt{(y+z)(y+x)}.$$

المسألة 3 . ليكن n عددا صحيحا موجبا. ولتكن $P_n = \{2^n, 2^{n-1}\cdot 3, 2^{n-2}\cdot 3^2, \dots, 3^n\}$. لكلّ مجموعة جزئيّة X من P_n ، نرمز بـ S_X لحاصل جمع جميع عناصر X ، مع الأخذ بالاعتبار أنّ $S_\emptyset = 0$ حيث $\emptyset$ هي المجموعة الخالية. ليكن y عددا حقيقيّا بحيث $0 \leq y \leq 3^{n+1} - 2^{n+1}$. برهن على وجود مجموعة جزئيّة Y من P_n تحقّق $0 \leq y - S_Y < 2^n$.

المسألة 4 . أوجد جميع الدوال $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ الّتي تحقّق الشرطين أدناه، حيث يرمز $\mathbb{Z}^+$ لمجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة:

(i) $f(n!) = f(n)!$ لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n ،

(ii) $m-n$ يقسم $f(m)-f(n)$ لكلّ عددين صحيحين موجبين مختلفين m و n .

10 درجات لكلّ مسألة.
الوقت المتاح: 4 ساعات و 30 دقيقة.