Language: **Turkish**

---

28 Nisan 2012, Cumartesi

Problem 1. $m(\widehat{ABC}) > 90^\circ$ olmak üzere, A, B ve C noktaları O merkezli bir Γ çemberi üzerinde olsun. AB doğrusu ile AC ye C noktasında dik olan doğrunun kesişim noktası D olsun. D den geçen ve AO ya dik olan doğruyu ℓ ile gösterelim. ℓ ile AC doğrusunun kesişim noktası E; Γ ile ℓ nin, D ve E arasında kalan kesişim noktası da F olsun.

BFE ve CFD üçgenlerinin çevrel çemberlerinin birbirlerine F noktasında teğet olduklarını kanıtlayınız.

Problem 2. Tüm x, y ve z pozitif gerçel sayıları için,

$$\sum_{\text{cyc}}(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} \geq 4(xy+yz+zx),$$

olduğunu kanıtlayınız.

Yukarıdaki notasyonda sol taraftaki ifade

$$(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)}+(y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)}+(z+x)\sqrt{(y+z)(y+x)}$$

toplamını göstermektedir.

Problem 3. n bir pozitif tam sayı ve $P_n = \{2^n, 2^{n-1}\cdot 3, 2^{n-2}\cdot 3^2, \dots, 3^n\}$ olsun. P_n nin herhangi bir X altkümesinin elemanlarının toplamını S_X ile gösterelim. Burada $\emptyset$ boş kümesi için, $S_\emptyset = 0$ olarak tanımlayalım. y gerçel sayısı $0 \leq y \leq 3^{n+1} - 2^{n+1}$ koşulunu sağlasın.

$0 \leq y - S_Y < 2^n$ olacak biçimde P_n kümesinin bir Y altkümesinin bulunduğunu kanıtlayınız.

Problem 4. $\mathbb{Z}^+$ pozitif tam sayılar kümesi olsun. Aşağıdaki her iki koşulu da sağlayan tüm $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonlarını bulunuz:

(i) Her n pozitif tam sayısı için, $f(n!) = f(n)!$ ve

(ii) Birbirinden farklı tüm m ve n pozitif tam sayları için $m-n$ farkı $f(m)-f(n)$ yi böler.

Her problem 10 puan değerindedir.
Sınav süresi: 4 saat 30 dakika.