Language: **Romanian**

Sâmbătă, 28 aprilie 2012

Problema 1. Fie punctele A, B şi C pe cercul Γ de centru O astfel încât $\angle ABC > 90°$. Fie D punctul de intersecţie a dreptei AB cu perpendiculara în punctul C pe dreapta AC. Fie ℓ perpendiculara pe dreapta AO care trece prin punctul D. Fie E punctul de intersecţie a dreptei ℓ cu dreapta AC şi fie F punctul de intersecţie a cercului Γ cu drepta ℓ care se află între D şi E.

Să se demonstreze că cercurile circumscrise triunghiurilor BFE şi CFD sunt tangente în F.

Problema 2. Să se demonstreze că

$$\sum_{\text{circ}} (x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} \geq 4(xy+yz+zx),$$

pentru orice numere reale strict pozitive x, y şi z.

În notaţia de mai sus, membrul stâng al inegalităţii este egal cu:

$$(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} + (y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)} + (z+x)\sqrt{(y+z)(y+x)}.$$

Problema 3. Fie n un număr natural nenul. Fie $P_n = \{2^n, 2^{n-1} \cdot 3, 2^{n-2} \cdot 3^2, \ldots, 3^n\}$. Pentru fiecare submulţime X a lui P_n notăm cu S_X suma tuturor elementelor lui X, cu convenţia că $S_\emptyset = 0$, unde $\emptyset$ este mulţimea vidă. Fie y un număr real astfel încât $0 \leq y \leq 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

Să se arate că există o submulţime Y a lui P_n astfel încât $0 \leq y - S_Y < 2^n$.

Problema 4. Fie $\mathbb{N}^*$ mulţimea numerelor naturale nenule. Să se determine toate funcţiile $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ care îndeplinesc simultan următoarele două proprietăţi:

(i) $f(n!) = f(n)!$ pentru orice număr natural nenul n,

(ii) $m - n$ divide $f(m) - f(n)$ pentru orice numere naturale nenule diferite m şi n.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.
Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute.