Language: **Macedonian**

Сабота, 28, април 2012

Задача 1. Нека A, B и C се точки на кружница Γ со центар O, така што $\angle ABC > 90^0$. Нека D е пресечната точка на правата AB со нормалата на правата AC во C. Нека l е правата низ D која е нормална на AO. Нека E е пресечната точка на правата l со правата AC, а F е пресечната точка на Γ со l која се наоѓа меѓу D и E.

Докажи дека опишаните кружници на триаголниците BFE и CFD се допираат во F.

Задача 2. Докажи дека

$$\sum_{cyc}(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} \geq 4(xy+yz+zx)$$

За секои позитивни реални броеви x, y и z.

Горната ознакаод левата страна е:

$$(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)}+(y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)}+(z+x)\sqrt{(y+z)(y+x)}.$$

Задача 3. Нека n е позитивен цел број и $P_n = \{2^n, 2^{n-1}\cdot 3, 2^{n-2}\cdot 3^2, \cdots, 3^n\}$. За секое подмножество X од P_n, со S_X го означуваме збирот од сите елементи од X, со тоа што земаме $S_\emptyset = 0$ каде $\emptyset$ е празното множество. Нека y е реален број за кој $0 \leq y \leq 3^{n+1} - 2^{n+1}$.
Докажи дека постои подмножество Y од P_n, такво што $0 \leq y - S_Y < 2^n$.

Задача 4. Нека $\mathbb{Z}^+$ е множеството од позитивни цели броеви. Најди ги сите пресликувања $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, кои ги исполнуваат следните два услови истовремено:

i. $f(n!) = f(n)!$ за секој позитивен цел број n,
ii. m-n е делител на $f(m)$-$f(n)$ за секои два различни позитивни цели броеви m и n.

Секоја задача се вреднува со 10 поени.
Време за работа: 4 часа и 30 минути.