Language: **Indonesian**

---

*Sabtu,28 April 2012*

**Soal 1.** Misalkan $A$,$B$, dan $C$ adalah titik-titik yang terletak pada lingkaran $\Gamma$ dengan titik pusat $O$. Asumsikan $\angle ABC > 90^\circ$. Misalkan $D$ adalah titik perpotongan garis $AB$ dan garis yang tegak lurus terhadap $AC$ di $C$. Misalkan $\ell$ adalah garis yang melalui $D$ dan tegak lurus terhadap $AO$. Misalkan $E$ adalah titik perpotongan $\ell$ dan garis $AC$ serta $F$ adalah titik perpotongan $\Gamma$ dan $\ell$ yang terletak di antara $D$ dan $E$.

Buktikan bahwa lingkaran luar segitiga $BFE$ dan lingkaran luar segitiga $CFD$ bersinggungan di titik $F$.

**Soal 2.** Buktikan bahwa

$$\sum_{\text{siklis}} (x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} \geq 4(xy+yz+zx),$$

untuk semua bilangan riil positif $x$, $y$, dan $z$.

*Catatan: notasi di atas maksudnya bahwa ruas kiri dari ketaksamaan di atas adalah*

$$(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} + (y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)} + (z+x)\sqrt{(y+z)(y+x)}.$$

**Soal 3.** Misalkan $n$ adalah bilangan bulat positif. Dimisalkan $P_n = \{2^n, 2^{n-1}\cdot 3, 2^{n-2}\cdot 3^2, \ldots, 3^n\}$. Untuk setiap himpunan bagian $X$ dari $P_n$, kita tulis $S_X$ untuk menyatakan jumlah dari semua anggota dari $X$, dengan konvensi bahwa $S_\emptyset = 0$ yang mana $\emptyset$ menandakan himpunan kosong. Misalkan bahwa $y$ adalah bilangan riil dengan $0 \leq y \leq 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

Tunjukkan bahwa ada sebuah himpunan bagian $Y$ dari $P_n$ sedemikian hingga $0 \leq y - S_Y < 2^n$.

**Soal 4.** Misalkan $\mathbb{Z}^+$ menyatakan himpunan semua bilangan bulat positif. Cari semua fungsi $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ yang memenuhi kedua syarat berikut ini:

(i) $f(n!) = f(n)!$ untuk setiap bilangan bulat positif $n$,

(ii) $m - n$ membagi $f(m) - f(n)$ untuk setiap bilangan bulat-bilangan bulat positif $m$ dan $n$, dengan $m$ tidak sama dengan $n$.

*Setiap soal bernilai 10 poin.*
*Waktu yang diperkenankan: 4 jam dan 30 menit.*